

TD₁₉ – Coniques**Exercice 1** ★★★

On considère un point M qui décrit la parabole $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 = 2py$ dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1. Quelle est l'enveloppe Γ de la famille des droites (IH) où I est le milieu de $[OM]$ et H le projeté orthogonal de M sur (Ox) ?
2. Tracer sur une même figure Γ et $\mathcal{C}$.

Exercice 2 ★★

Soit A le point de coordonnées $(1, 0)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y^2 + x = 1$ et l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + 2y^2 = 1$.

Pour tout $m \neq 0$, la droite variable Δ_m d'équation $y = m(1 - x)$ passant par A recoupe la parabole en un point $M \neq A$ et l'ellipse en un point $N \neq A$.

1. Donner les coordonnées de M et N .
2. Donner une équation de la tangente en M à la parabole $\mathcal{P}$ et une équation de la tangente en N à l'ellipse $\mathcal{E}$.
3. Déterminer le lieu des points d'intersection I de ces deux tangentes quand m décrit $\mathbb{R}^*$.

Exercice 3 Hyperbole équilatère ★★

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'excentricité d'une hyperbole pour que ses deux asymptotes soient orthogonales. On dit alors que l'hyperbole est équilatère

Exercice 4 ★★★

Soit $\mathcal{H}$ une hyperbole du plan $\mathcal{P}$. On considère un point M de $\mathcal{H}$ et on note H et H' ses projetés orthogonaux respectifs sur les asymptotes de $\mathcal{H}$. Montrer que le produit $MH \times MH'$ ne dépend pas du choix du point M .

Exercice 5 ★★

Soient A et B deux points distincts du plan et soit I le milieu du segment $[AB]$. Déterminer le lieu des points M du plan tels que $MI^2 = MA \times MB$.

Exercice 6 Définition bifocale d'une ellipse ★★★

Soit F_1 et F_2 deux points distincts du plan. On considère un réel $a > 0$ et on désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $MF_1 + MF_2 = 2a$.

1. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ si $2a < F_1F_2$.
2. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ si $2a = F_1F_2$.
3. On suppose que $2a > F_1F_2$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une ellipse dont les deux foyers sont F_1 et F_2 .
 - (b) Montrer que si l'application $f : I \rightarrow \mathcal{P}$, notée $f : t \mapsto M(t)$, est une paramétrisation de l'ellipse $\mathcal{C}$, alors on a

$$\forall t \in I, \quad \left\langle f'(t), \frac{\overrightarrow{F_1M(t)}}{F_1M(t)} + \frac{\overrightarrow{F_2M(t)}}{F_2M(t)} \right\rangle = 0.$$

- (c) Comment se réfléchit sur l'ellipse un rayon lumineux passant par F_1 ?

Exercice 7 Définition bifocale d'une hyperbole ★★★

Soient F_1 et F_2 deux points distincts du plan. On considère un réel $a > 0$ et on désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $|MF_1 - MF_2| = 2a$.

1. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ si $2a > F_1F_2$.
2. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ si $2a = F_1F_2$.
3. Montrer que si $2a < F_1F_2$, alors l'ensemble $\mathcal{C}$ est une hyperbole dont les deux foyers sont F_1 et F_2 .

Exercice 8 Propriété optique de la parabole ★★★

Soit $\mathcal{C}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$.

1. Montrer que pour tout point M_0 de $\mathcal{C}$, la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 est la médiatrice du segment $[FH_0]$ où H_0 est le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$.
2. En déduire que la droite normale à la parabole $\mathcal{C}$ au point M_0 est la bissectrice de l'angle $\widehat{FM_0H_0}$.
3. Comment se réfléchit un rayon lumineux se dirigeant sur la parabole dans une direction parallèle à l'axe focal ?

Exercice 9 ★★

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer la nature géométrique et préciser les éventuelles symétries des coniques suivantes.

- (i) $4x^2 + y^2 + 4x - 2y - 6 = 0$,
- (ii) $27x^2 - 6y^2 + 18x - 64y - 12 = 0$,
- (iii) $x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$,
- (iv) $xy + 3x + 5y - 4 = 0$.
- (v) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x - 2y = 0$,
- (vi) $x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$,
- (vii) $13x^2 - 32xy + 37y^2 - 5 = 0$,
- (viii) $x^2 + 8xy - 5y^2 - 28x + 14y + 3 = 0$,
- (ix) $3x^2 + \sqrt{3}xy - 2y^2 + 14y - 4 = 0$,
- (x) $x^2 + 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y = 0$.

Exercice 10 ★★

Soit $m \in \mathbb{R}$. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer la nature de la conique $\mathcal{C}_m$ d'équation

$$x^2 + y^2 + 2mxy = 1$$

Exercice 11 ★★

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la conique $\mathcal{C}$ d'équation

$$x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + y - 2 = 0.$$

1. Déterminer la nature de la conique $\mathcal{C}$.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ admet une tangente au point $(1, 1)$ et préciser une équation de cette dernière.

Exercice 12 ★★

Discuter selon la valeur du réel λ la nature et les éléments caractéristiques de la courbe plane dont une équation cartésienne dans un repère orthonormé du plan est

$$(1 + \lambda)(x^2 + y^2) + 2(1 - \lambda)xy - 4\lambda y + \lambda + \frac{1}{4} = 0.$$

Exercice 13 ★★★

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 3.

1. Montrer que l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation $P(x) = P(y)$ est la réunion d'une droite et d'une conique $\mathcal{C}$.
2. Montrer que la conique $\mathcal{C}$ est bornée.

Exercices issus d'oraux

Exercice 14 ★★

(Oral 2023)

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Étudier et dessiner la courbe d'équation $\frac{5}{2}(x^2 + y^2) - 3xy + \sqrt{2}(x + y) = 0$

Exercice 15 ★★★

(Oral 2010)

Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 2px$, $(p > 0)$ et I un point quelconque du plan.

1. Déterminer le nombre de tangentes à (P) passant par I .
 2. Déterminer le lieu des points I par lesquels passent deux tangentes à (P) orthogonales.
-

Exercice 16 ★★★

(Oral 2010)

Soit (Γ) l'hyperbole d'équation $xy = k$, $(k > 0)$ et A, B et C trois points de Γ Montrer que l'orthocentre H du triangle ABC est aussi sur (Γ) .

Exercice 17 ★★★

(Oral 2016)

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A(1, 0)$, $A'(-1, 0)$ et $N(2, t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Soit M le point d'intersection de la perpendiculaire en A à (AN) et de la droite $(A'N)$.

1. Trouver les coordonnées de M en fonction de t .
 2. Étudier la courbe C , ensemble des points M .
 3. Montrer que C est une ellipse privée d'un point.
-

Exercice 18 ★★

(Oral 2019)

Pour $z \in \mathbb{C}$ on pose $Z = iz^2 + 2(6 - 2i)z + 18 + 8i$.

1. Trouver les complexes z tels que $Z = 0$.
2. On considère l'ensemble (C_r) des points d'affixes z tels que $\operatorname{Re}(Z) = 0$. Caractériser et tracer cet ensemble.
3. On considère l'ensemble (C_i) des points d'affixes z tels que $\operatorname{Im}(Z) = 0$.
4. Déterminer l'intersection de ces deux ensembles.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

1. On peut paramétrer la parabole

$$\mathcal{C} = \left\{ \left(x, \frac{x^2}{2p} \right), x \in \mathbb{R} \right\}$$

Si M a pour coordonnées $\left(x, \frac{x^2}{2p} \right)$ alors I a pour coordonnées $\left(\frac{x}{2}, \frac{x^2}{4p} \right)$ et H a pour coordonnées $(x, 0)$.

La droite (IH) est ainsi la droite passant par le point $H(x)$ de coordonnées $(x, 0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(x)$ de coordonnées $(-2px, x^2)$.

On a

$$\det(\vec{u}(x), \vec{u}'(x)) = \begin{vmatrix} -2p & -2px \\ 2x & x^2 \end{vmatrix} = 2px^2$$

Pour $x \neq 0$ on a $\det(\vec{u}(x), \vec{u}'(x)) \neq 0$ donc la famille de droite $(I(x)H(x))$ pour $x \neq 0$ admet bien une enveloppe.

On la cherche sous la forme $H(x) + \lambda(x)\vec{u}(x)$ avec $\det(H'(x) + \lambda(x)\vec{u}'(x), \vec{u}(x)) = 0$.

On a ainsi

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - 2p\lambda(x) & -2px \\ 2x\lambda(x) & x^2 \end{vmatrix} = x^2(1 + 2p\lambda(x))$$

D'où $\lambda(x) = -\frac{1}{2p}$.

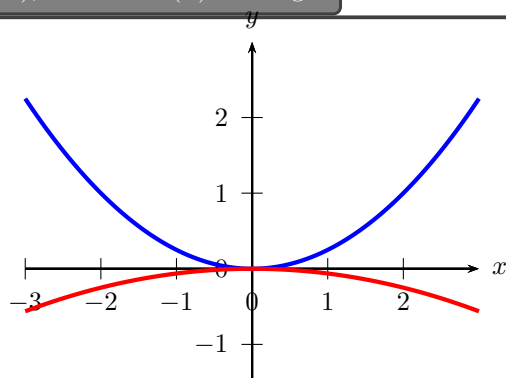
Une enveloppe de la famille de droites (IH) est donc la courbe paramétrée par $\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = -\frac{t^2}{2p} \end{cases}$

pour $t \neq 0$

Il s'agit également d'une parabole d'axe focal l'axe (Oy) dirigé dans le sens de $-\vec{j}$ privée de son sommet O .

2. On a le tracé suivant

Figure .1 – Tracé de $(\mathcal{C})$, en blue et (Γ) en rouge



Corrigé de l'exercice 2

1. On a $\begin{cases} y_M^2 + x_M = 1 \\ y_M = m(1 - x_M) \end{cases}$ d'où $(x_M, y_M) \in \left\{ \left(\frac{m^2 - 1}{m^2}, \frac{1}{m} \right), (1, 0) \right\}$

Puisque $M \neq A$, M est donc le point de coordonnées $\left(\frac{m^2 - 1}{m^2}, \frac{1}{m} \right)$.

On a $\begin{cases} x_N^2 + 2y_N^2 = 1 \\ y_N = m(1 - x_N) \end{cases}$ d'où $(x_N, y_N) \in \left\{ \left(\frac{2m^2 - 1}{2m^2 + 1}, \frac{2m}{2m^2 + 1} \right), (1, 0) \right\}$

Puisque $N \neq A$, N est donc le point de coordonnées $\left(\frac{2m^2 - 1}{2m^2 + 1}, \frac{2m}{2m^2 + 1} \right)$.

2. La tangente à la parabole en un point $B(x_0, y_0)$ a pour équation $(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) = 0$.

Ainsi, la tangente à $\mathcal{P}$ en M a pour équation $\left(x - \frac{m^2 - 1}{m^2} \right) + \frac{2}{m} \left(y - \frac{1}{m} \right) = 0$, i.e. $(m^2x - (m^2 - 1)) + 2(my - 1) = 0$.

La tangente à l'ellipse en un point $B(x_0, y_0)$ a pour équation $2x_0(x - x_0) + 4y_0(y - y_0) = 0$.

Ainsi, la tangente à $\mathcal{E}$ en N a pour équation $2 \frac{2m^2 - 1}{2m^2 + 1} \left(x - \frac{2m^2 - 1}{2m^2 + 1} \right) + \frac{8m}{2m^2 + 1} \left(y - \frac{2m}{2m^2 + 1} \right) = 0$, i.e. $2(2m^2 - 1)((2m^2 + 1)x - 2m^2 + 1) + 8m((2m^2 + 1)y - 2m) = 0$.

3. L'intersection de ces deux tangentes est le point I de coordonnées $\left(1, \frac{1}{2m} \right)$.

Lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$ ce point décrit la droite d'équation $x = 1$ privée du point A .

Corrigé de l'exercice 3

D'après le cours, dans le repère focal, une hyperbole a une équation de la forme $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a = \frac{p}{e^2 - 1}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}$.

De plus, dans ce repère on peut la paramétrer par $\begin{cases} x(t) = a \operatorname{ch}(t) \\ y(t) = b \operatorname{sh}(t) \end{cases}$.

Ainsi ses deux asymptotes sont les droites d'équation $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ dirigée respectivement par les vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(a, -b)$.

Les asymptotes sont donc orthogonales si et seulement si $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$, i.e. si et seulement si $a^2 = b^2$.

Ainsi les asymptotes sont orthogonales si et seulement si $e^2 - 1 = 1$ donc si et seulement si $e = \sqrt{2}$.

Rappel

L'excentricité d'une hyperbole est un réel strictement plus grand que 1.

Corrigé de l'exercice 4

On se place dans le repère focal.

On va paramétrer notre hyperbole par $\begin{cases} x(t) = a \operatorname{ch}(t) \\ y(t) = b \operatorname{sh}(t) \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$

Les asymptotes de $\mathcal{H}$ sont les droites d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

Le projeté H de M sur la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$ vérifie $bx_H - ay_H = 0$ et $\begin{vmatrix} x_H - x_M & b \\ y_H - y_M & -a \end{vmatrix} = 0$.

Ainsi $x_H = \frac{a(ax_M + by_M)}{a^2 + b^2} = \frac{a(a^2 \operatorname{ch}(t) + b^2 \operatorname{sh}(t))}{a^2 + b^2}$ et $y_H = \frac{b(a^2 \operatorname{ch}(t) + b^2 \operatorname{sh}(t))}{a^2 + b^2}$.

De manière similaire $x_{H'} = \frac{a(a^2 \operatorname{ch}(t) - b^2 \operatorname{sh}(t))}{a^2 + b^2}$ et $y_{H'} = \frac{b(-a^2 \operatorname{ch}(t) + b^2 \operatorname{sh}(t))}{a^2 + b^2}$.

On a alors

$$\begin{aligned}
 MH^2 &= \left(\frac{a(a^2 \operatorname{ch}(t) + b^2 \operatorname{sh}(t))}{a^2 + b^2} - a \operatorname{ch}(t) \right)^2 + \left(\frac{b(a^2 \operatorname{ch}(t) + b^2 \operatorname{sh}(t))}{a^2 + b^2} - b \operatorname{sh}(t) \right)^2 \\
 &= \left(\frac{ab^2(\operatorname{sh}(t) - \operatorname{ch}(t))}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{ba^2(\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t))}{a^2 + b^2} \right)^2 \\
 &= \frac{a^2 b^2 (\operatorname{ch}(t) - \operatorname{sh}(t))^2 (b^2 + a^2)}{(a^2 + b^2)^2} \\
 &= \frac{a^2 b^2 e^{-2t}}{a^2 + b^2}
 \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
 MH'^2 &= \left(\frac{a(a^2 \operatorname{ch}(t) - b^2 \operatorname{sh}(t))}{a^2 + b^2} - a \operatorname{ch}(t) \right)^2 + \left(\frac{b(-a^2 \operatorname{ch}(t) + b^2 \operatorname{sh}(t))}{a^2 + b^2} - b \operatorname{sh}(t) \right)^2 \\
 &= \left(\frac{-ab^2(\operatorname{sh}(t) + \operatorname{ch}(t))}{a^2 + b^2} \right)^2 + \left(\frac{-ba^2(\operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t))}{a^2 + b^2} \right)^2 \\
 &= \frac{a^2 b^2 (\operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t))^2 (b^2 + a^2)}{(a^2 + b^2)^2} \\
 &= \frac{a^2 b^2 e^{2t}}{a^2 + b^2}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$MH \times MH' = \sqrt{\frac{a^2 b^2 e^{-2t}}{a^2 + b^2} \frac{a^2 b^2 e^{2t}}{a^2 + b^2}} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

Le résultat ne dépend donc pas du choix du point M .

Corrigé de l'exercice 5

On se place dans le repère direct centré en I et dont l'axe des abscisses est l'axe $I, \overrightarrow{IAB}$.

Notons $a = IB$. Dans ce repère A a pour coordonnées $(-a, 0)$ et B a pour coordonnées $(a, 0)$

Soit $M(x, y)$, on a alors $MI^2 = x^2 + y^2$, $MA = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ et $MB = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$.

Puisque toutes les quantités sont positives, on a $MI^2 = MA \times MB$ si et seulement si $MI^4 = MA^2 \times MB^2$.

L'ensemble que l'on cherche a ainsi pour équation $(x^2 + y^2)^2 - ((x-a)^2 + y^2)((x+a)^2 + y^2) = 0$

Or

$$\begin{aligned}
 (x^2 + y^2)^2 - ((x-a)^2 + y^2)((x+a)^2 + y^2) &= x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 - (x-a)^2(x+a)^2 - y^2((x-a)^2 + (x+a)^2) - y^4 \\
 &= x^4 + 2x^2 y^2 - (x^2 - a^2)^2 - y^2(2x^2 + 2a^2) \\
 &= a^2(2x^2 - 2y^2 - a^2)
 \end{aligned}$$

Ainsi $MI^2 = MA \times MB$ si et seulement si $x^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}$. On reconnaît là l'équation d'une hyperbole d'axe focal l'axe (IB) et centrée en I .

Corrigé de l'exercice 6

1. L'inégalité triangulaire nous assure que $\|\overrightarrow{F_1 M} + \overrightarrow{M F_2}\| \leq \|\overrightarrow{F_1 M}\| + \|\overrightarrow{M F_2}\|$. C'est-à-dire $F_1 F_2 \leq MF_1 + MF_2$.

Ainsi, si $2a < F_1 F_2$ alors il n'existe pas de point M tel que $MF_1 + MF_2 = 2a$, on a donc $\mathcal{C} = \emptyset$.

2. Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire nous assure que $\|\overrightarrow{F_1 M} + \overrightarrow{M F_2}\| = \|\overrightarrow{F_1 M}\| + \|\overrightarrow{M F_2}\|$ si et seulement si $\overrightarrow{F_1 M}$ et $\overrightarrow{M F_2}$ sont positivement colinéaires, ce qui est équivalent à $M \in [F_1 F_2]$.

Ainsi si $2a = F_1F_2$ alors $\mathcal{C} = [F_1F_2]$.

3. On suppose que $2a > F_1F_2$.

(a) On se place dans le repère direct centré au milieu I de $[F_1F_2]$ et d'axe des abscisses l'axe $(I, \overrightarrow{IF_2})$.

Notons $b = IF_2 \geq 0$. Dans ce repère F_2 a pour coordonnées $(b, 0)$ et F_1 a pour coordonnées $(-b, 0)$.

Soit $M(x, y)$ un point du plan. On a alors

$$MF_1 + MF_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$$

D'où

$$\begin{aligned} MF_1 + MF_2 = 2a &\Leftrightarrow \sqrt{(x-b)^2 + y^2} + \sqrt{(x+b)^2 + y^2} = 2a \\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{(x-b)^2 + y^2} + \sqrt{(x+b)^2 + y^2} \right)^2 = 4a^2 && \text{Toutes les quantités en jeu sont positives} \\ &\Leftrightarrow (x-b)^2 + y^2 + (x+b)^2 + y^2 + 2\sqrt{((x-b)^2 + y^2)((x+b)^2 + y^2)} = 4a^2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2b^2 + 2\sqrt{(x^2 - b^2)^2 + y^4 + y^2(2x^2 + 2b^2)} = 4a^2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^4 - 2x^2b^2 + b^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2b^2} = 2a^2 - b^2 - x^2 - y^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2b^2 + b^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2b^2 = (2a^2 - b^2 - x^2 - y^2)^2 \\ 2a^2 - b^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2b^2 + b^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2b^2 \\ = y^4 + 2x^2y^2 - 4a^2y^2 + 2b^2y^2 + x^4 - 4a^2x^2 + 2b^2x^2 + 4a^4 - 4b^2a^2 + b^4 \\ 2a^2 - b^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2y^2 + a^2x^2 - b^2x^2 - a^4 + b^2a^2 = 0 \\ 2a^2 - b^2 - x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 - b^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - b^2) \\ 2a^2 - b^2 \geq x^2 + y^2 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} = 1 \\ 2a^2 - b^2 \geq x^2 + y^2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque $2b = F_1F_2 < 2a$ l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} = 1$ décrit une ellipse centrée en I dont l'axe focal est l'axe $(I, \overrightarrow{IF_2})$, i.e. la droite (F_1F_2) , de demi-grand axe a et de demi-petit axe $\sqrt{a^2 - b^2}$.

Cette ellipse est incluse dans le cercle de centre I et de rayon a . Comme $a > b$ on a $2a^2 - b^2 > a^2$, ainsi, si $M(x, y)$ est une point de l'ellipse, alors $x^2 + y^2 \leq a^2 \leq 2a^2 - b^2$.

Notre ensemble est donc bien une ellipse centrée en I dont l'axe focal est l'axe $(I, \overrightarrow{IF_2})$, i.e. la droite (F_1F_2) , de demi-grand axe a et de demi-petit axe $\sqrt{a^2 - b^2}$.

On sait qu'alors les foyers se trouvent sur l'axe focal. Dans ce repère ils ont pour coordonnées $(\sqrt{G^2 - P^2}, 0)$ et $(-\sqrt{G^2 - P^2}, 0)$ où G est le demi-grand axe et P le demi-petit axe. Ici les foyers ont donc pour coordonnées $(b, 0)$ et $(-b, 0)$, ce sont donc bien F_1 et F_2 .

(b) On rappelle que, si u et v sont deux fonctions à valeurs vectorielles alors $(\langle u, v \rangle)' = \langle u', v \rangle + \langle u, v' \rangle$. Ainsi $\|u\|' = \frac{\langle u', u \rangle}{\|u\|}$.

Soit f une paramétrisation de l'ellipse et $\varphi : t \mapsto \|\overrightarrow{F_1M}(t)\| + \|\overrightarrow{F_2M}(t)\|$.

Foyers

Dans le repère focal, le centre I de l'ellipse a pour coordonnées $\left(\frac{ep}{1 - e^2}, 0 \right) = (\sqrt{G^2 - P^2}, 0)$. Ainsi ce foyer a pour coordonnées $(\sqrt{G^2 - P^2}, 0)$ dans le repère centré en I . L'ellipse étant symétrique par rapport à son centre I , le point de coordonnées $(\sqrt{G^2 - P^2}, 0)$ est également un foyer de l'ellipse.

φ est alors constante égale à $2a$. Or, pour $t \in I$, on a

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \frac{\overrightarrow{F_1 M'}(t), \overrightarrow{F_1 M}(t)}{\|\overrightarrow{F_1 M}(t)\|} + \frac{\overrightarrow{F_1 M'}(t), \overrightarrow{F_1 M}(t)}{\|\overrightarrow{F_1 M}(t)\|} \\ &= \left\langle f'(t), \frac{\overrightarrow{F_1 M}(t)}{F_1 M(t)} \right\rangle + \left\langle f'(t), \frac{\overrightarrow{F_2 M}(t)}{F_2 M(t)} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\overrightarrow{F_1 M}(t)}{F_1 M(t)} + \frac{\overrightarrow{F_2 M}(t)}{F_2 M(t)} \right\rangle\end{aligned}$$

φ étant constante, on a bien

$$\forall t \in I, \quad \left\langle f'(t), \frac{\overrightarrow{F_1 M}(t)}{F_1 M(t)} + \frac{\overrightarrow{F_2 M}(t)}{F_2 M(t)} \right\rangle = 0.$$

- (c) Un rayon lumineux passant par F_1 qui arrive en un point $M(t)$ se réfléchit de telle sorte que l'angle entre le rayon incident et la tangente à l'ellipse est égal à l'angle entre le rayon réfléchi et la tangente à l'ellipse.

Ainsi, si le rayon incident est dirigé par un vecteur unitaire u alors le rayon réfléchi est dirigé par le vecteur unitaire v image de u par la symétrie par rapport à la normale à l'ellipse en $M(t)$.

v est alors l'unique vecteur unitaire tel que $u + v$ soit colinéaire à la normale à l'ellipse en $M(t)$, donc l'unique vecteur unitaire tel que $\langle u + v, f'(t) \rangle = 0$.

Si le rayon part de F_1 alors le vecteur u est le vecteur $\frac{\overrightarrow{F_1 M}(t)}{F_1 M(t)}$, la question précédente nous assure dans ce cas que le vecteur v est le vecteur $\frac{\overrightarrow{F_2 M}(t)}{F_2 M(t)}$. Le rayon réfléchi se trouve donc à l'intérieur de l'ellipse sur la droite $(F_2 M)$, il passe ainsi par le foyer F_2 .

Corrigé de l'exercice 7

- De la même manière que dans l'exercice précédent, si $2a > F_1 F_2$, $\mathcal{C}$ est l'ensemble vide.
- Si $2a = F_1 F_2$ alors, là encore en exploitant le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, on en déduit que $\mathcal{C}$ est la réunion de deux demi-droites, c'est la droite $(F_1 F_2)$ privée des points de $]F_1 F_2[$.
- On se place dans le repère direct centré au milieu I de $[F_1 F_2]$ et d'axe des abscisses l'axe $(I, \overrightarrow{IF_2})$.

On note $b = IF_2$, F_2 a alors pour coordonnées $(b, 0)$ et F_1 a pour coordonnées $(-b, 0)$.

En notant (x, y) les coordonnées de M on a alors

$$\begin{aligned}|MF_1 - MF_2| = 2a &\Leftrightarrow (MF_1 - MF_2)^2 = 4a^2 \\ &\Leftrightarrow MF_1^2 - 2MF_1 MF_2 + MF_2^2 = 4a^2 \\ &\Leftrightarrow (x+b)^2 + y^2 + (x-b)^2 + y^2 - 2\sqrt{((x+b)^2 + y^2)((x-b)^2 + y^2)} = 4a^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + b^2 - 2a^2 = \sqrt{(x^2 - b^2) + 2y^2(x^2 + b^2) + y^4} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + y^2 + b^2 - 2a^2)^2 = (x^2 - b^2) + 2y^2(x^2 + b^2) + y^4 \\ x^2 + y^2 + b^2 - 2a^2 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (b^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = a^2(b^2 - a^2) \\ x^2 + y^2 + b^2 - 2a^2 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2 - a^2} = 1 \\ x^2 + y^2 \geq 2a^2 - b^2 \end{cases}\end{aligned}$$

Comme $b > a$ l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2 - a^2} = 1$ décrit une hyperbole de centre I et d'axe focal l'axe IF_2

Si $M(x, y)$ est un point de cette hyperbole alors

$$x^2 + y^2 = a^2 + \frac{a^2}{b^2 - a^2}y^2 + y^2 = a^2 + \frac{b^2}{b^2 - a^2}y^2 \geq a^2 \geq 2a^2 - b^2$$

Ainsi notre ensemble est bien l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2 - a^2} = 1$ décrit une hyperbole de centre I .

On sait que les deux foyers se trouvent sur l'axe focal à une distance $\frac{ep}{e^2 - 1}$ du centre, ici $a = \frac{p}{e^2 - 1}$ et $\sqrt{b^2 - a^2} = \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}$, d'où $\frac{ep}{e^2 - 1} = \sqrt{a^2 + b^2 - a^2} = |b|$.

Les deux foyers de l'hyperbole se trouvent donc bien aux points F_1 et F_2 .

Corrigé de l'exercice 8

1. On se place dans le repère centré au sommet de la parabole dont l'axe des abscisses est l'axe de symétrie de la parabole.

Dans ce repère la parabole a pour équation $y^2 = 2px$, le foyer a pour coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$ et la directrice $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $x = -\frac{p}{2}$. Soit alors $M_0\left(\frac{y^2}{2p}, y\right)$ un point de la parabole. Son projeté orthogonal H_0 sur $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $(-\frac{p}{2}, y)$.

La tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 est la droite dirigée par le vecteur de coordonnées $(\frac{y}{p}, 1)$ et passant par M_0 et la droite FH_0 est dirigée par le vecteur de coordonnées $(-p, y)$.

Les vecteurs de coordonnées respectives $(\frac{y}{p}, 1)$ et $(-p, y)$ sont orthogonaux, la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 est donc orthogonale à la droite (FH_0) .

De plus la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 a pour représentation paramétrique

$$T = \left\{ N \left(\frac{y^2 + 2ty}{2p}, y + t \right), t \in \mathbb{R} \right\}$$

Le milieu du segment $[FH_0]$ a pour coordonnées $(0, \frac{y}{2})$. En prenant le paramètre $t = -\frac{y}{2}$ on en déduit qu'il appartient bien à la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 .

Ainsi la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 est la médiatrice du segment $[FH_0]$

2. Par définition de la parabole par foyer et directrice on sait que $d(M_0, \mathcal{D}) = d(M_0, F)$ i.e. $M_0H_0 = M_0F$. Le triangle FM_0H_0 est donc isocèle en M_0 .

On en déduit que la bissectrice de l'angle $\widehat{FM_0H_0}$ et la médiatrice du segment $[FH_0]$ sont confondues.

Or la droite normale à la parabole $\mathcal{C}$ au point M_0 est la droite passant par M_0 et orthogonale à la tangente en M_0 . C'est donc la parallèle à la médiatrice du segment $[FH_0]$ passant par M_0 . On vient de voir que cette médiatrice passe par M_0 , ainsi la droite normale à la parabole $\mathcal{C}$ au point M_0 est la médiatrice du segment $[FH_0]$

Finalement la droite normale à la parabole $\mathcal{C}$ au point M_0 est la bissectrice de l'angle $\widehat{FM_0H_0}$.

3. Un rayon lumineux se dirigeant sur la parabole dans une direction parallèle à l'axe focal arrive en M_0 en suivant la droite H_0M_0 . Il se réfléchit sur la parabole de sorte que la normale à la parabole soit la bissectrice de l'angle formé entre le rayon incident et le rayon réfléchi. D'après ce qui précède on en déduit que le rayon réfléchi suit la droite (M_0F) , il passe donc par le foyer F de la parabole.

Corrigé de l'exercice 9

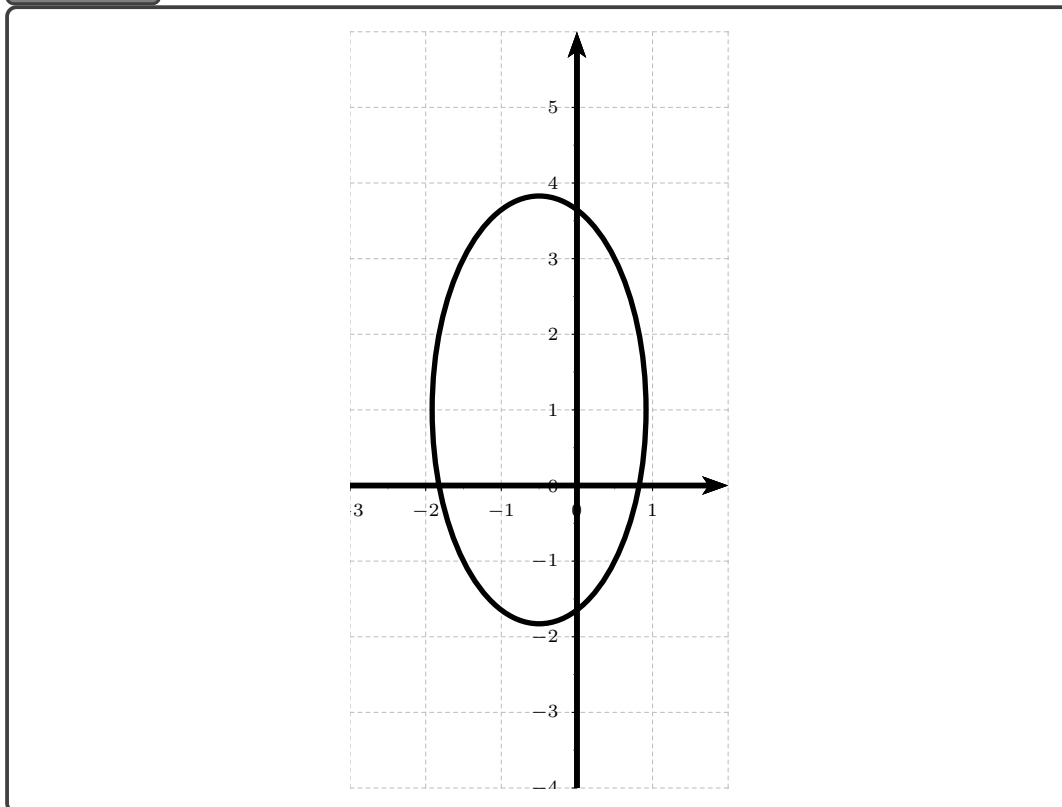
- (i) Il n'y a pas besoin ici de changer les vecteurs de base de notre repère.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$4x^2 + y^2 + 4x - 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 4\left(x + \frac{1}{2}\right) + (y - 1)^2 = 8 \Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{(y - 1)^2}{8} = 1$$

Il s'agit donc d'une ellipse de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, d'axe focal l'axe $(O, \vec{j})$, de demi-grand axe $\sqrt{8}$ et de demi-petit axe $\sqrt{2}$.

Figure .2



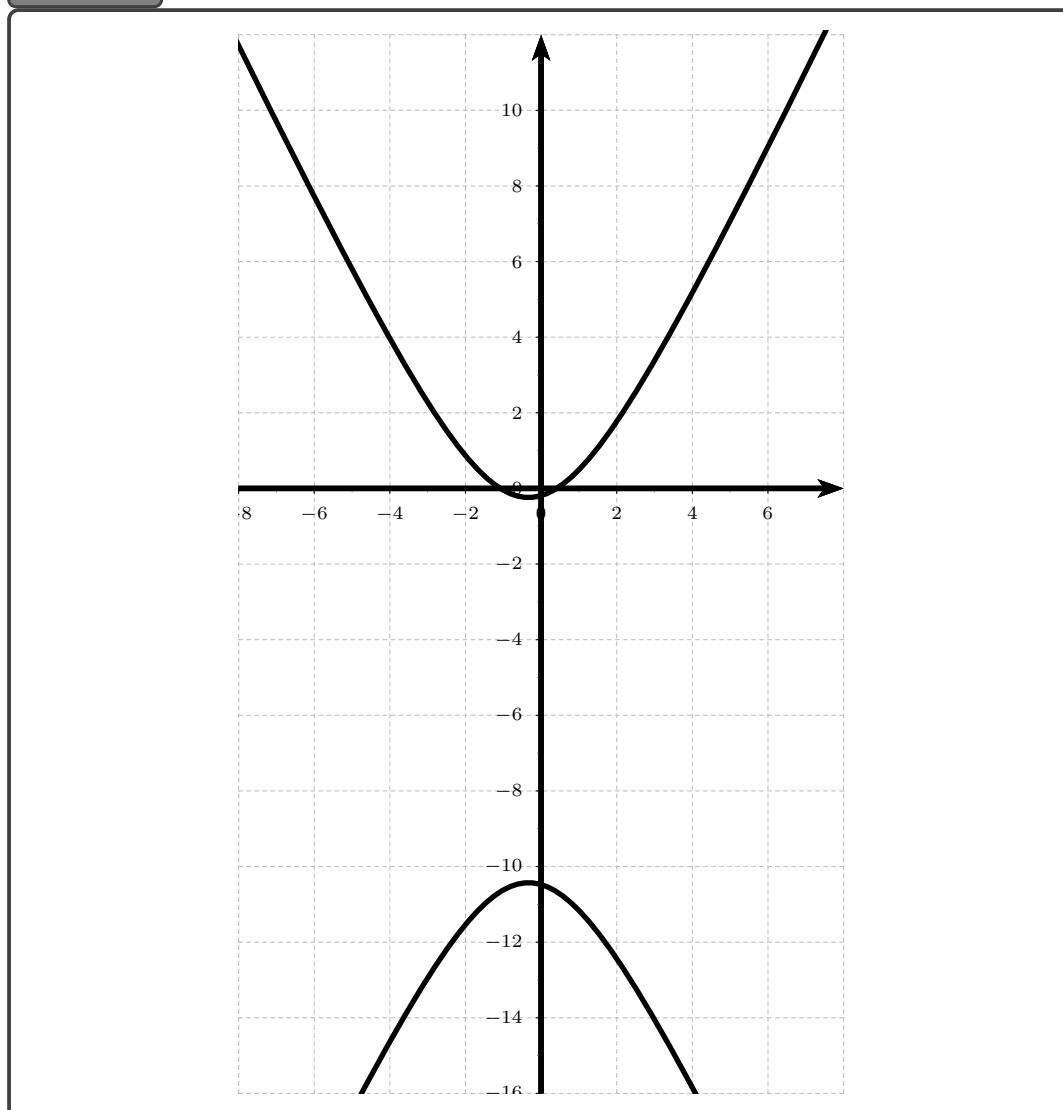
(ii) Il n'y a pas besoin ici de changer les vecteurs de base notre repère.

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$27x^2 - 6y^2 + 18x - 64y - 12 = 0 \Leftrightarrow 27\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 - 6\left(y + \frac{16}{3}\right)^2 = -\frac{467}{3} \Leftrightarrow \frac{-81\left(x + \frac{1}{3}\right)^2}{467} + \frac{6\left(y + \frac{16}{3}\right)^2}{467} = 1$$

Il s'agit donc d'une hyperbole de centre $\Omega\left(-\frac{1}{3}, -\frac{16}{3}\right)$ et d'axe focal l'axe $(\Omega, \vec{j})$

Figure .3



(iii) Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

A est symétrique réelle, ses valeurs propres sont 2 et -3 et on a

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad E_{-3}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

Posons $\vec{e}_1 = \frac{2\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{5}}$ et $\vec{e}_2 = \frac{\vec{i} - 2\vec{j}}{\sqrt{5}}$.

Si M a pour coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors il a pour coordonnées (X, Y) dans $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ notre équation est équivalente à $2X^2 - 3Y^2 - \frac{8X}{\sqrt{5}} + \frac{6Y}{\sqrt{5}} - 11 = 0$.

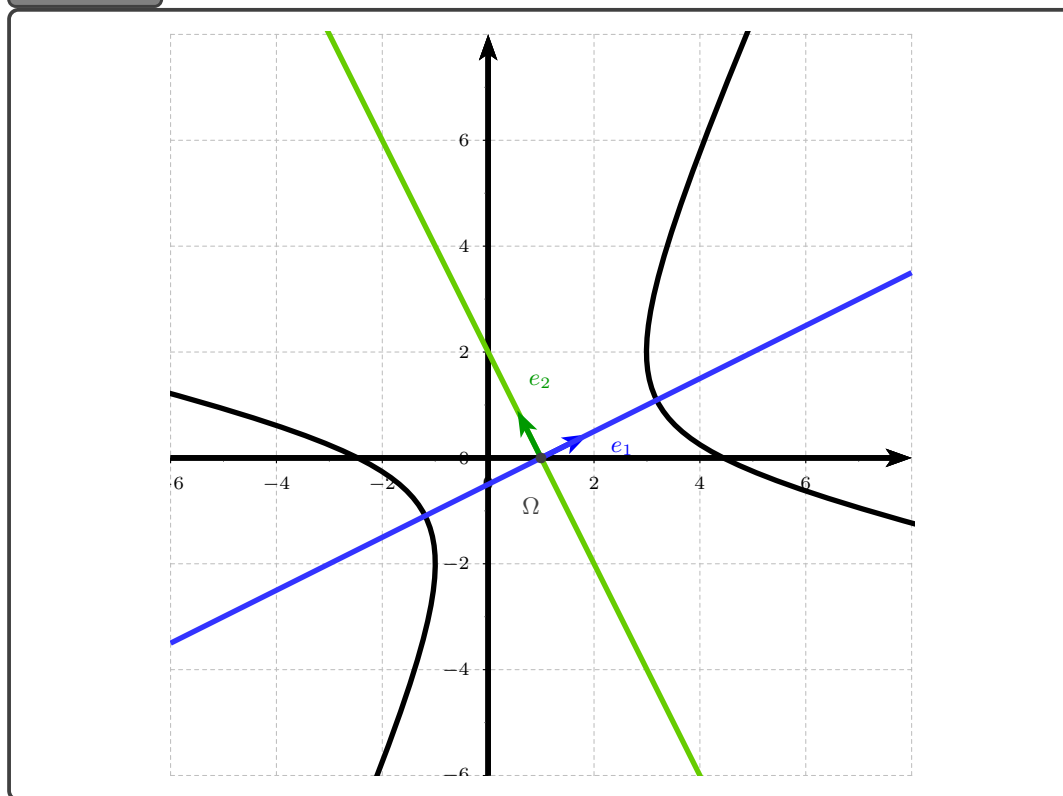
En mettant sous forme canonique on a

$$2X^2 - 3Y^2 - \frac{8X}{\sqrt{5}} + \frac{6Y}{\sqrt{5}} - 11 = 0 \Leftrightarrow 2\left(X - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 3\left(Y - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 12 \Leftrightarrow \frac{\left(X - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{6} - \frac{\left(Y - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{4} = 1$$

Considérons le point Ω de coordonnées $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, il a pour coordonnées $(1, 0)$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Notre conique est une hyperbole de centre $\Omega(1,0)$ et d'axe focal l'axe $(\Omega, \vec{e}_1)$

Figure .4



(iv) On a

$$xy + 3x + 5y - 4 = 0 \Leftrightarrow (x+5)(y+3) = 19$$

On sait qu'une équation de la forme $XY = k$ définit une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont les axes du repère.

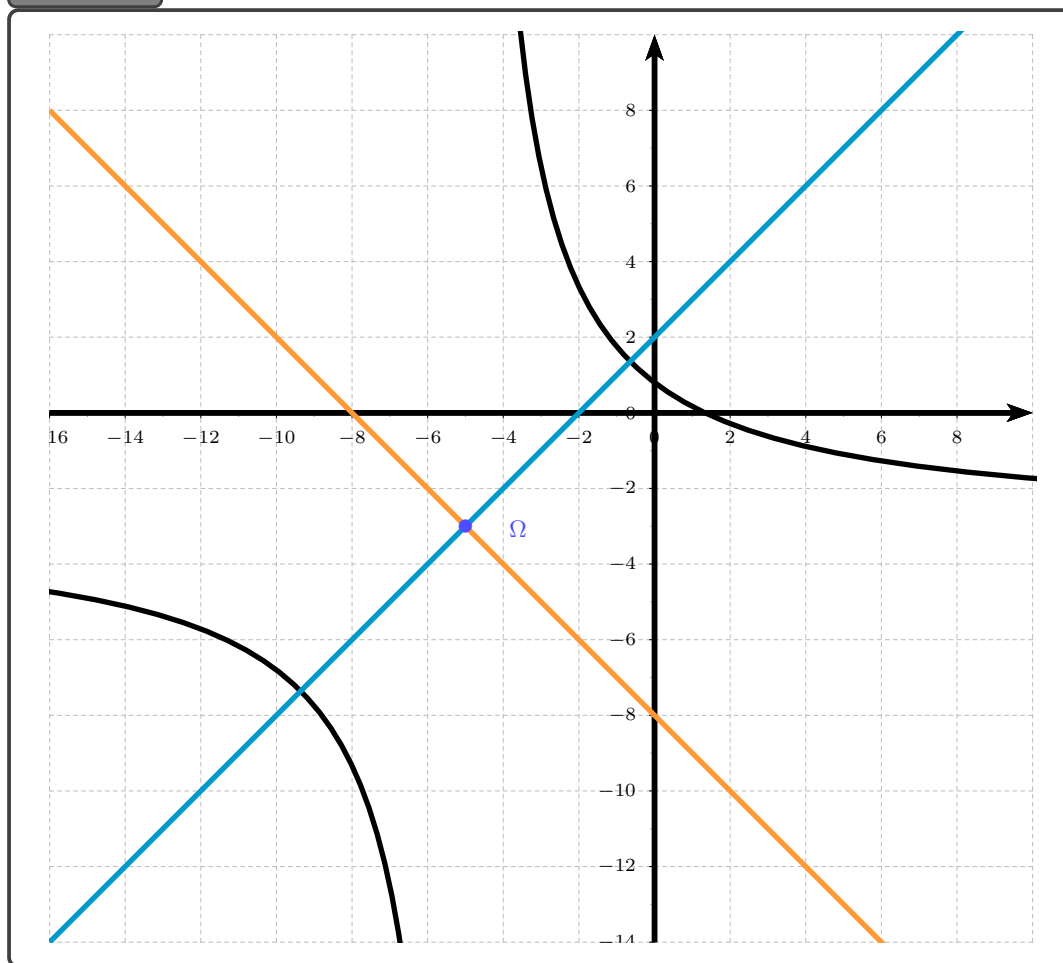
Ici notre équation décrit donc une hyperbole centrée en $\Omega(-5, -3)$. Elle est équilatère et ses asymptotes sont les axes $(\Omega, \vec{i})$ et $(\Omega, \vec{j})$. Ses axes de symétrie sont donc les axes $(\Omega, \vec{i} + \vec{j})$ et $(\Omega, \vec{i} - \vec{j})$.

Puisque $k > 0$ l'axe focal est l'axe $(\Omega, \vec{i} + \vec{j})$.

Hyperbole

Il s'agit ici simplement de la courbe représentative de la fonction $y \mapsto -3 + \frac{19}{x+5}$

Figure .5



(v) Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

A est symétrique réelle, ses valeurs propres sont 2 et 0 et on a

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Posons $\vec{e}_1 = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{e}_2 = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$.

Si M a pour coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors il a pour coordonnées (X, Y) dans $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ notre équation est équivalente à

$$2X^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}X - \frac{5}{\sqrt{2}}Y = 0.$$

En mettant sous forme canonique on obtient

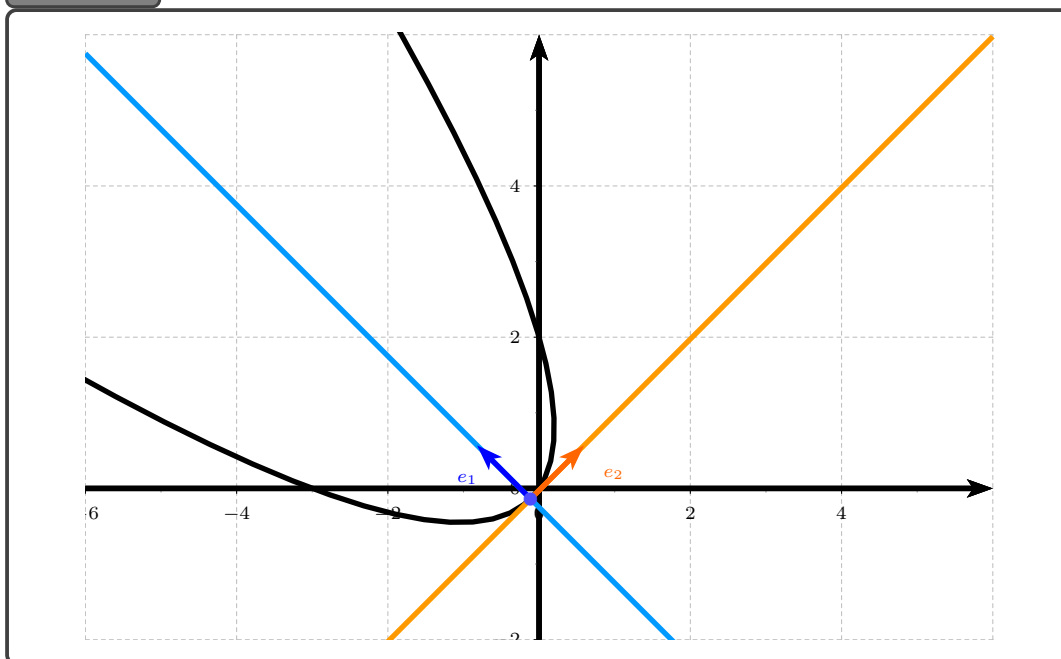
$$\left(X + \frac{1}{4\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{5}{2\sqrt{2}} \left(Y + \frac{\sqrt{2}}{80} \right)$$

Considérons le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{4\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{80} \right)$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, il a pour

coordonnées $\left(\frac{-9}{80}, \frac{-11}{80} \right)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Notre conique est donc une parabole de sommet Ω et d'axe focal l'axe $(\Omega, \vec{e}_2)$, la parabole est dirigée « dans le sens de $\vec{e}_2$ ».

Figure .6



(vi) Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

A est symétrique réelle, ses valeurs propres sont 2 et 0 et on a

$$E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Posons $\vec{e}_1 = \frac{\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$ et $\vec{e}_2 = \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}}$.

Si M a pour coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ alors il a pour coordonnées (X, Y) dans $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ où $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dans le repère $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ notre équation est équivalente à $2X^2 - 6\sqrt{2}X + 8 = 0$

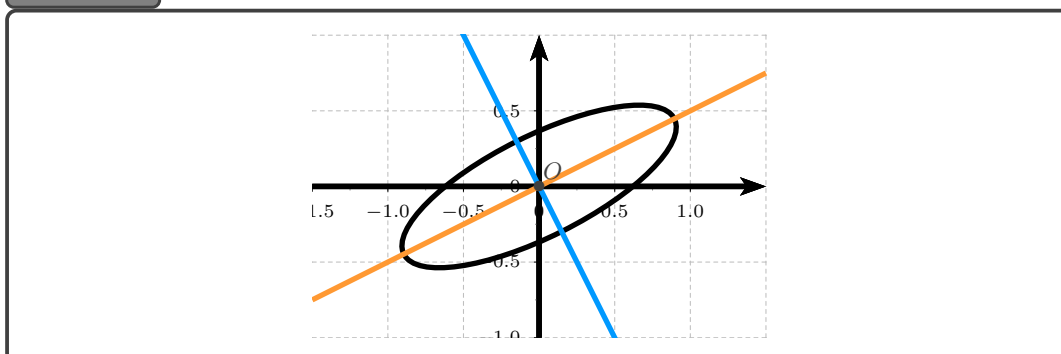
Notre conique est donc la réunion des deux droites parallèles d'équations $X = \sqrt{2}$ et $X = 2\sqrt{2}$ dans le repère $(0, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ ce sont les droites d'équations $x + y = 2$ et $x + y = 4$.

(vii) On suit la méthode vue en cours et appliquée aux exemples précédents.

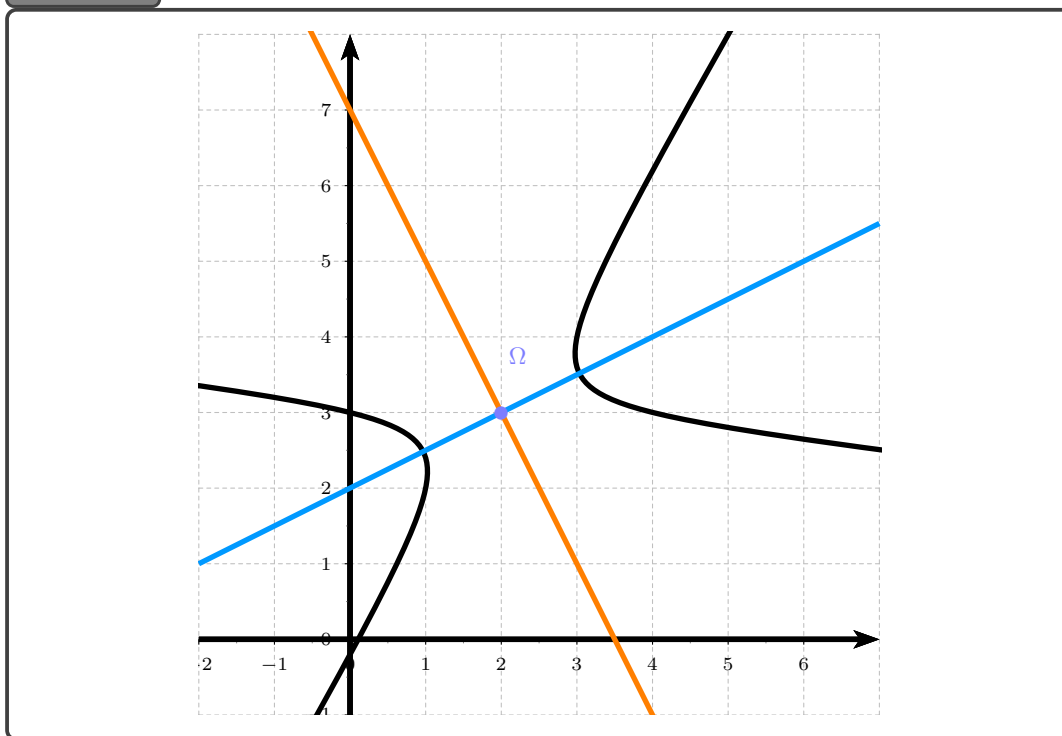
Cette conique est une ellipse de centre $O(0,0)$, d'axe focal l'axe $\left(O, \frac{2\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{5}}\right)$, de demi-grand axe 1 et de demi-petit axe $\frac{1}{3}$

Figure .7



- (viii) Cette conique est l'hyperbole de centre $\Omega(2, 3)$ et d'axe focal l'axe $\left(\Omega, \frac{2\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{5}}\right)$

Figure .8



- (ix) La matrice associée a deux valeurs propres strictement positives, notre conique est donc de type ellipse.

Posons $\vec{e}_1 = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$

Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ l'équation devient

$$\frac{3}{2}u^2 + \frac{7}{2}v^2 - 7\sqrt{3}u + 7v - 4 = 0$$

C'est-à-dire

$$\frac{3}{2}\left(u - \frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2 + \frac{7}{2}(v+1)^2 = 32$$

ou encore

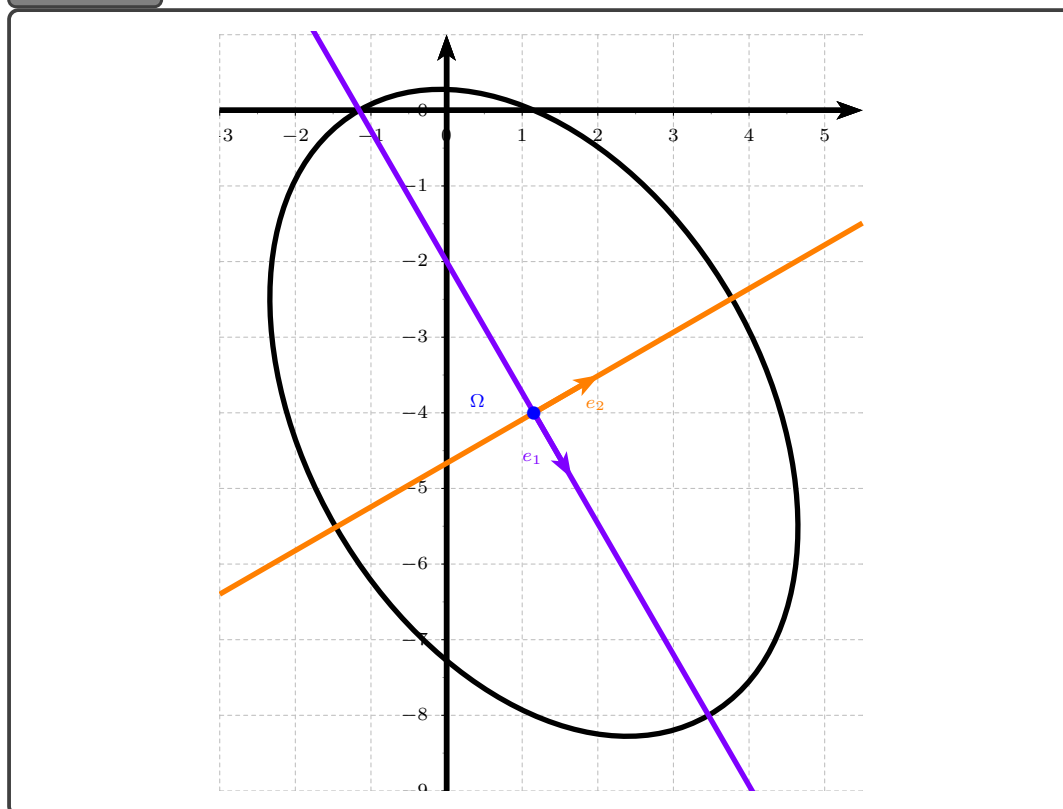
$$\frac{\left(u - \frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2}{\frac{64}{3}} + \frac{7(v+1)^2}{\frac{64}{7}} = 1$$

Il s'agit ainsi d'une ellipse de demi-grand axe $\frac{8}{\sqrt{3}}$, de demi-petit axe $\frac{8}{\sqrt{7}}$. On pose Ω le point de coordonnées $\left(\frac{7}{\sqrt{3}}, -1\right)$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. L'axe focal de l'ellipse est l'axe $(\Omega, \vec{e}_1)$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, Ω a pour coordonnées $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -4\right)$

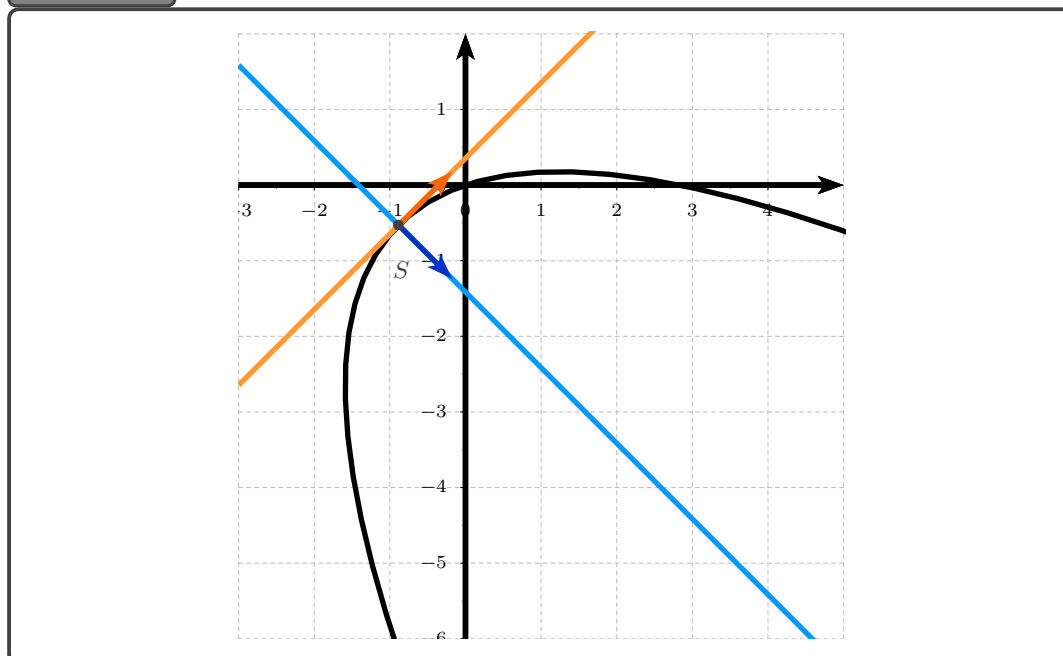
On en déduit le tracé suivant

Figure .9



(x) Il s'agit d'une parabole de sommet $S(\frac{-5}{4\sqrt{2}}, \frac{-3}{4\sqrt{2}})$ et d'axe focal l'axe $(S, \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}})$

Figure .10



Corrigé de l'exercice 10

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{pmatrix}$.

A est symétrique réelle et a pour valeurs propres $1+m$ et $1-m$. On a $E_{1+m}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

et $E_{1+m}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Soit alors $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$.

Le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé et, dans ce repère, la conique $\mathcal{C}_m$ a pour équation $(1+m)X^2 + (1-m)Y^2 = 1$.

- Si $m > 1$ alors $\mathcal{C}_m$ est une hyperbole centrée en O d'axe focal l'axe $(O, \vec{u})$
- Si $m < -1$ alors $\mathcal{C}_m$ est une hyperbole centrée en O d'axe focal l'axe $(O, \vec{v})$
- Si $m \in]-1, 0[$ alors $\mathcal{C}_m$ est une ellipse centrée en O d'axe focal l'axe $(O, \vec{u})$ de demi-grand axe $\frac{1}{\sqrt{1+m}}$ et de demi-petit axe $\frac{1}{\sqrt{1-m}}$
- Si $m \in]0, 1[$ alors $\mathcal{C}_m$ est une ellipse centrée en O d'axe focal l'axe $(O, \vec{v})$ de demi-grand axe $\frac{1}{\sqrt{1-m}}$ et de demi-petit axe $\frac{1}{\sqrt{1+m}}$
- Si $m = 0$ alors $\mathcal{C}_m$ est le cercle de centre O et de rayon 1.
- Si $m = 1$ alors $\mathcal{C}_m$ est la réunion des droites parallèles d'équations respectives $X = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $X = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ce sont les droites d'équations $x + y = 1$ et $x + y = -1$

- Si $m = -1$ alors $\mathcal{C}_m$ est la réunion des droites parallèles d'équations respectives $Y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ce sont les droites d'équations $y = x - 1$ et $y = x + 1$

Corrigé de l'exercice 11

1. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

A est symétrique réelle, son déterminant vaut -2 , elle admet donc deux valeurs propres non-nulles de signes opposés.

$\mathcal{C}$ est ainsi une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes.

2. La fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + y - 2$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On a $\nabla f(x, y) = (2x - 4y + 2, -4x + 4y + 1)$. Comme $\nabla f(1, 1) = (0, 1) \neq (0, 0)$ le point $(1, 1)$ est un point régulier de la courbe $f(x, y) = 0$.

$\mathcal{C}$ admet ainsi une tangente au point $(1, 1)$ et cette tangente est la droite passant par $(1, 1)$ et dont $\nabla f(1, 1)$ est un vecteur normal

Cette tangente admet donc comme vecteur normal le vecteur de coordonnées $(0, 1)$. Son équation est donc de la forme $y + c = 0$ avec $c \in \mathbb{R}$.

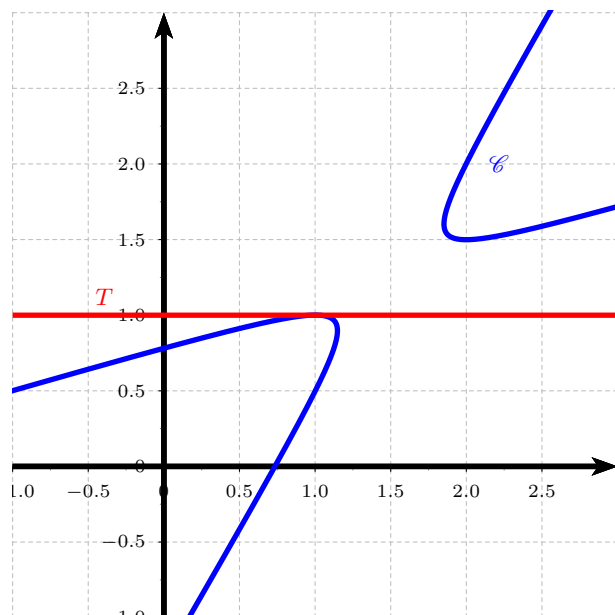
Puisque $(1, 1)$ est un point de la tangente on a $c = 1$. Ainsi la tangente à $\mathcal{C}$ au point $(1, 1)$ est la droite d'équation $y = 1$.

Si $\mathcal{C}$ était la réunion de deux droites sécantes alors elle serait confondues avec ses tangentes. Ici on constate que la droite d'équation $y = 1$ n'est pas incluse dans $\mathcal{C}$, ainsi $\mathcal{C}$ est bien une hyperbole.

Éléments géométriques

Ici on ne nous demande pas explicitement les éléments géométriques de $\mathcal{C}$, de plus les valeurs propres de A étant $\frac{3 + \sqrt{17}}{2}$ et $\frac{3 - \sqrt{17}}{2}$, les calculs suivants seraient fastidieux, on ne va donc pas les faire.

Figure .11



Corrigé de l'exercice 12

Notons $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le repère orthonormé initial.

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 + \lambda & 1 - \lambda \\ 1 - \lambda & 1 + \lambda \end{pmatrix}$.

A est symétrique réelle et a pour valeurs propres 2 et 2λ . On a $E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ et $E_{2\lambda}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Soit alors $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j})$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$ et $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé et, si M a pour coordonnées (x, y) dans le repère initial alors il a pour coordonnées (X, Y) dans ce repère où $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} X - Y \\ X + Y \end{pmatrix}$$

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ la conique a alors pour équation

$$2X^2 + 2\lambda Y^2 - \frac{4\lambda}{\sqrt{2}}X - \frac{4\lambda}{\sqrt{2}}Y + \lambda + \frac{1}{4} = 0$$

En mettant sous forme canonique ceci est équivalent à

$$2 \left(X - \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2\lambda \left(Y - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0$$

Posons Ω de coordonnées $\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Dans le repère initial Ω a pour coordonnées (x_Ω, y_Ω) où $\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} P \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda - 1 \\ \lambda + 1 \end{pmatrix}$

Dans le repère $(\Omega, \vec{u}, \vec{v})$ la conique a alors pour équation

$$8\tilde{X}^2 + 8\lambda\tilde{Y}^2 = 4\lambda^2 - 1$$

- Si $\lambda > 1$ notre conique est une ellipse de centre Ω , d'axe focal l'axe $(\Omega, \vec{u})$, de demi-grand axe $\sqrt{\frac{4\lambda^2 - 1}{8}}$ et de demi-petit axe $\sqrt{\frac{4\lambda^2 - 1}{8\lambda}}$
- Si $\lambda = 1$ notre conique est un cercle de centre Ω et de rayon $\frac{3}{8}$
- Si $\lambda \in \left] \frac{1}{4}, 1 \right[$ notre conique est une ellipse de centre Ω , d'axe focal l'axe $(\Omega, \vec{u})$, de demi-grand axe $\sqrt{\frac{4\lambda^2 - 1}{8\lambda}}$ et de demi-petit axe $\sqrt{\frac{4\lambda^2 - 1}{8}}$
- Si $\lambda = \frac{1}{2}$ alors notre conique est réduit au point Ω .
- Si $\lambda \in \left[0, \frac{1}{4} \right[$ notre conique est l'ensemble vide.
- Si $\lambda \in \left] -\frac{1}{2}, 0 \right[$ alors notre conique est une hyperbole d'axe focal l'axe $(\Omega, \vec{v})$.
- Si $\lambda = -\frac{1}{2}$ alors notre conique est l'intersection des deux droites sécantes d'équations $\sqrt{2}\tilde{X} + \tilde{Y} = 0$ et $\sqrt{2}\tilde{X} - \tilde{Y} = 0$.
 Dans le repère initial ce sont les droites d'équations $2x + (6 + 4\sqrt{2})y - \sqrt{2} = 0$ et $2x + (6 - 4\sqrt{2})y + \sqrt{2} = 0$.
- Si $\lambda < -\frac{1}{2}$ alors notre conique est une hyperbole d'axe focal l'axe $(\Omega, \vec{u})$.

Corrigé de l'exercice 13

1. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $a \neq 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
 P(x) = P(y) &\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = ay^3 + by^2 + cy + d \\
 &\Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx - ay^3 - by^2 - cy = 0 \\
 &\Leftrightarrow a(x-y)(x^2 + xy + y^2) + b(x-y)(x+y) + c(x-y) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-y)(ax^2 + ay^2 + axy + bx + by + c) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = y \quad \text{ou} \quad ax^2 + ay^2 + axy + bx + by + c = 0
 \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble des points du plan de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation $P(x) = P(y)$ est la réunion de la droite d'équation $x = y$ et de la conique d'équation $ax^2 + ay^2 + axy + bx + by + c = 0$.

2. Posons $A = \begin{pmatrix} a & \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} & a \end{pmatrix}$.

$\det(A) = \frac{3a^2}{4} > 0$. Ainsi $\mathcal{C}$ est une ellipse, un point ou l'ensemble vide. Dans tous les cas $\mathcal{C}$ est bien un ensemble borné.

Corrigé de l'exercice 14

Posons $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$. On a alors $\text{Sp}(A) = \{1, 4\}$.

Prenons $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ et $\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la courbe a pour équation

$$u^2 + 4v^2 + 2u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u+1)^2 + 4v^2 = 1$$

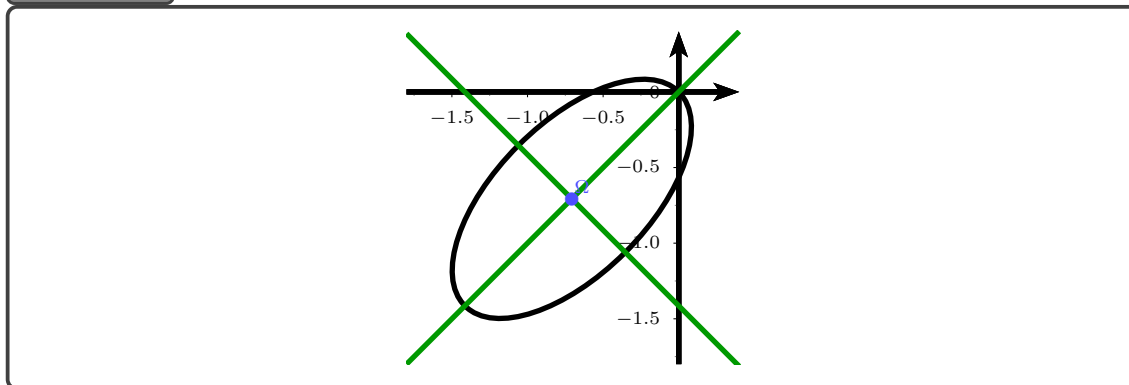
On reconnaît la courbe d'une ellipse de demi grand axe 1 et de demi petit axe $\frac{1}{2}$. Son centre

est le point Ω de coordonnées $(-1, 0)$ dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ donc de coordonnées $\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

L'axe focal de l'ellipse est l'axe $(\Omega, \vec{e}_1)$.

On obtient le tracé suivant :

Figure .12



Corrigé de l'exercice 15

1. Soit $M\left(\frac{y_M^2}{2p}, y_M\right)$ un point de la parabole. La tangente à (P) en M admet pour vecteur normal le vecteur de coordonnées $(-2p, 2y_M)$, elle admet donc pour équation

$$T_m : -p\left(x - \frac{y_M^2}{2p}\right) + y_M(y - y_M) = 0$$

Notons (a, b) les coordonnées du point I . On cherche alors tous les réels y_M tels que $-p\left(a - \frac{y_M^2}{2p}\right) + y_M(b - y_M) = 0 = 0$, c'est-à-dire tels que

$$y_M^2 - 2by_M + 2ap = 0$$

- Si $4b^2 - 8ap > 0$ i.e. $b^2 > 2ap$ alors il passe par I exactement deux tangentes à la parabole. Cela correspond aux points sur la partie « à gauche, au dessus et en dessous » de la parabole
 - si $b^2 = 4a$ alors I est un point de la parabole et il passe par I exactement une tangente à la parabole.
 - Si $b^2 < 2ap$ alors aucune tangente à la parabole ne passe par I e. Cela correspond aux points sur la partie « à droite » de la parabole
2. On se place dans le cas $b^2 > 2ap$. Les tangentes à (P) passant par I sont les tangentes à (P) aux points $M_1\left(\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right)$ et $M_2\left(\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right)$ où $y_1 = \frac{2b - \sqrt{4b^2 - 8ap}}{2} = b - \sqrt{b^2 - 2ap}$ et $y_2 = b + \sqrt{b^2 - 2ap}$.

Ces deux tangentes ont pour vecteurs normaux respectifs (p, y_1) et (p, y_2) . Elles sont donc orthogonales si et seulement ces deux vecteurs sont orthogonaux i.e. si et seulement $p^2 + y_1y_2 = 0$.

Or

$$\begin{aligned} p^2 + y_1y_2 &= p^2 + (b - \sqrt{b^2 - 2ap})(b + \sqrt{b^2 - 2ap}) \\ &= p^2 + b^2 - (b^2 - 2ap) \\ &= p(p + 2a) \end{aligned}$$

Ainsi les points I par lesquels passent deux tangentes à (P) orthogonales sont exactement les points de coordonnées $\left(-\frac{p}{2}, b\right)$ avec b tel que $b^2 > 2p\left(-\frac{p}{2}\right)$ (ce qui est toujours vrai).

Le lieu des points I par lesquels passent deux tangentes à (P) orthogonales est donc la droite d'équation $x - \frac{p}{2}$.

Corrigé de l'exercice 16

Soit $A\left(a, \frac{k}{a}\right)$, $B\left(b, \frac{k}{b}\right)$ et $C\left(c, \frac{k}{c}\right)$ trois points de (Γ) avec a, b et c trois réels distincts

L'orthocentre du triangle ABC est le point d'intersection des hauteurs du triangle, c'est donc l'unique point H tel que $\overrightarrow{AH}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{AC}$.

$$\text{En notant } (x, y) \text{ ses coordonnées on a ainsi } \begin{cases} (x-a)(c-b) + \left(y - \frac{k}{a}\right)\left(\frac{k}{c} - \frac{k}{b}\right) = 0 \\ (x-b)(c-a) + \left(y - \frac{k}{b}\right)\left(\frac{k}{c} - \frac{k}{a}\right) = 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} ak y - abcx - k^2 + a^2 bc = 0 \\ bky - abcx - k^2 + ab^2 c = 0 \end{cases}$$

Ce système a pour solution $x = -\frac{k^2}{abc}$, $y = -\frac{abc}{k}$.

Il est alors aisé de constater que $xy = k$, ainsi l'orthocentre du triangle ABC appartient bien à l'hyperbole (Γ) .

Corrigé de l'exercice 17

1. Le point M est tel que $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont orthogonaux et $\overrightarrow{A'H}$ et $\overrightarrow{A'N}$ sont colinéaires.

En notant (x, y) ses coordonnées on a donc $(x-1) + yt = 0$ et $\begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y & t \end{vmatrix} = 0$

D'où $x = \frac{3-t^2}{3+t^2}$ et $y = \frac{2t}{3+t^2}$.

2. On étudie la courbe $\begin{cases} x(t) = \frac{3-t^2}{3+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{3+t^2} \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

La fonction x est paire et la fonction y est impaire. On va donc étudier la courbe sur $\mathbb{R}_+$ et on obtiendra le support complet par symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

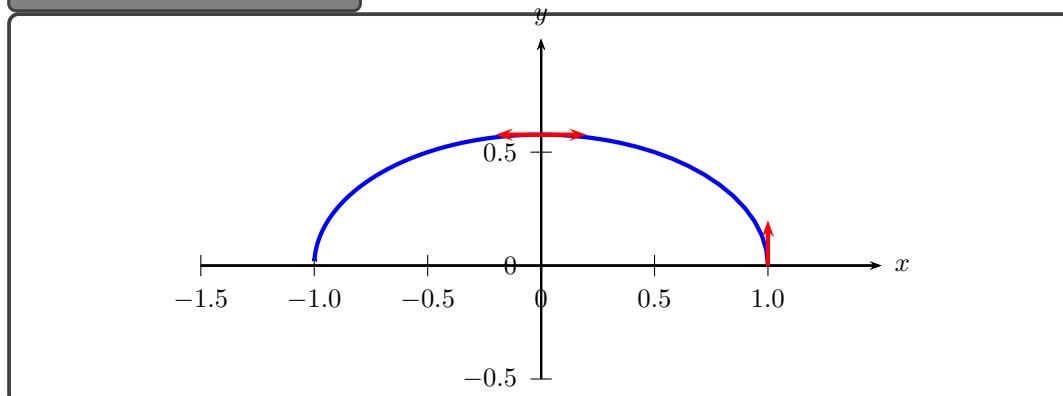
$$\text{Pour } t \geq 0 \text{ on a } \begin{cases} x'(t) = \frac{-12t}{(3+t^2)^2} \\ y'(t) = \frac{2(3-t^2)}{(3+t^2)^2} \end{cases}$$

On en déduit le tableau des variations conjointes

t	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$x'(t)$	0	+	
$x(t)$	1	0	-1
$y(t)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$y'(t)$	+	0	-

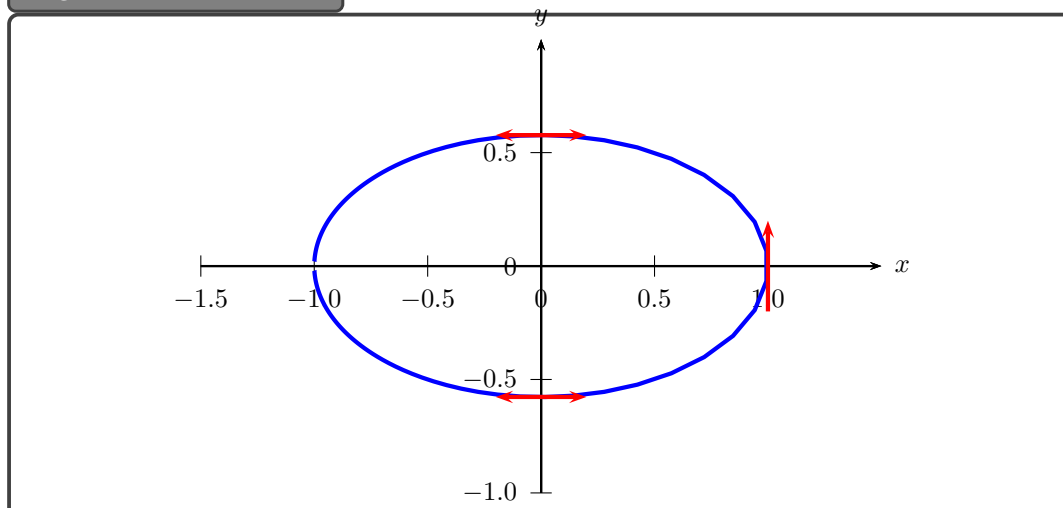
La courbe n'a pas de point singulier. On en déduit le tracé suivant

Figure .13 – Tracé sur $\mathbb{R}_+$



Puis par symétrie

Figure .14 – Tracé sur $\mathbb{R}$



3. Le tracé semble indiquer que (C) est incluse dans l'ellipse de centre $O(0,0)$, d'axe focal l'axe des abscisses, de demi-grand axe 1 et de demi-petit axe $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cette ellipse a pour équation $x^2 + 3y^2 = 1$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$x(t)^2 + 3y(t)^2 = \frac{(3-t^2)^2 + 12t^2}{(3+t^2)^2} = \frac{9+6t^2+t^4}{(3+t^2)^2} = 1$$

Ainsi (C) est bien incluse dans l'ellipse de centre $O(0,0)$, d'axe focal l'axe des abscisses, de demi-grand axe 1 et de demi-petit axe $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Soit (x, y) un point de cette ellipse. On a en particulier $x \in [-1, 1]$ et $y \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Pour $x \neq -1$ posons $t = \sqrt{3} \frac{1-x}{1+x}$, on a alors $x = \frac{3-t^2}{3+t^2}$ et $y = \frac{2t}{3+t^2}$ ainsi tous les points de l'ellipse privée du point de coordonnées $(-1, 0)$ appartiennent bien à (C)

Le point $(-1, 0)$ n'appartient par contre pas à (C) car il n'existe pas de réel t tel que $\frac{3-t^2}{3+t^2} = -1$.

Finalement (C) est l'ellipse de centre $O(0,0)$, d'axe focal l'axe des abscisses, de demi-grand axe 1 et de demi-petit axe $\frac{1}{\sqrt{3}}$ privée du point de coordonnées $(-1, 0)$.

Corrigé de l'exercice 18

1. L'équation $Z = 0$ est une équation polynomiale de degré 2 dans $\mathbb{C}$

Son discriminant est $\Delta = 4 \left[(6-2i)^2 - 18i + 8 \right] = 4(40 - 42i)$.

On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta$. On va alors résoudre le système
$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\delta^2) &= 160 \\ \operatorname{Im}(\delta^2) &= -168, \\ |\delta^2| &= |\Delta| \end{cases}$$

ce qui nous donne le système
$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 160 \\ 2ab &= -168 \\ a^2 + b^2 &= 232 \end{cases}$$

On obtient $\delta = 14 - 12i$ ou $-14 + 12i$

Ainsi les solutions de l'équation sont $z = \frac{-(6-2i) \pm (7-3i)}{i}$, i.e. $z = 5 + 13i$ et $z = -1 - i$.

2. Posons $z = x + iy$ avec x, y réels. On a alors $Z = (-2xy + 12x + 4y + 18) + i(x^2 - y^2 - 4x + 12y + 8)$.

Alors $\operatorname{Re}(Z) = 0 \iff xy - 6x - 2y - 9 = 0 : (C_r)$ est donc une conique.

Une factorisation donne

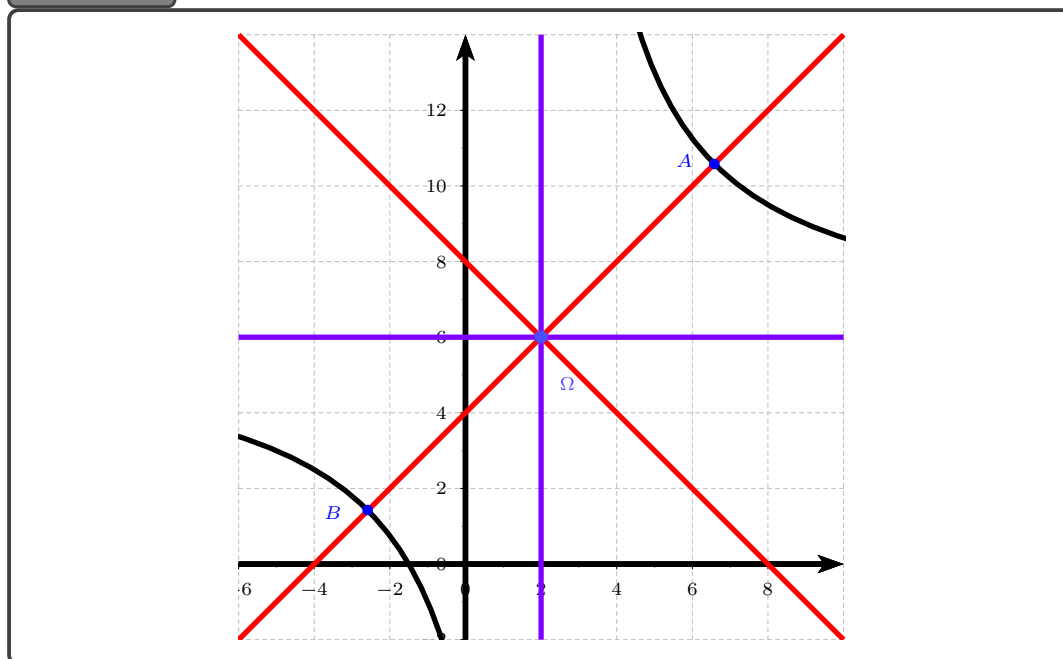
$$M(x, y) \in (C_r) \iff (x-2)(y-6) = 21$$

(C_r) est donc une hyperbole équilatère de centre $\Omega(2, 6)$ et d'asymptotes les droites $(\Omega, \vec{i})$ et $(\Omega, \vec{j})$.

Ses axes de symétrie sont dirigés par $\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{i} - \vec{j}$. L'axe focal est la droite d'équation $x - y + 4 = 0$. Les sommets de l'hyperbole sont $A(2 + \sqrt{21}, 6 + \sqrt{21})$ et $B(2 - \sqrt{21}, 6 - \sqrt{21})$.

On en déduit le tracé suivant :

Figure .15



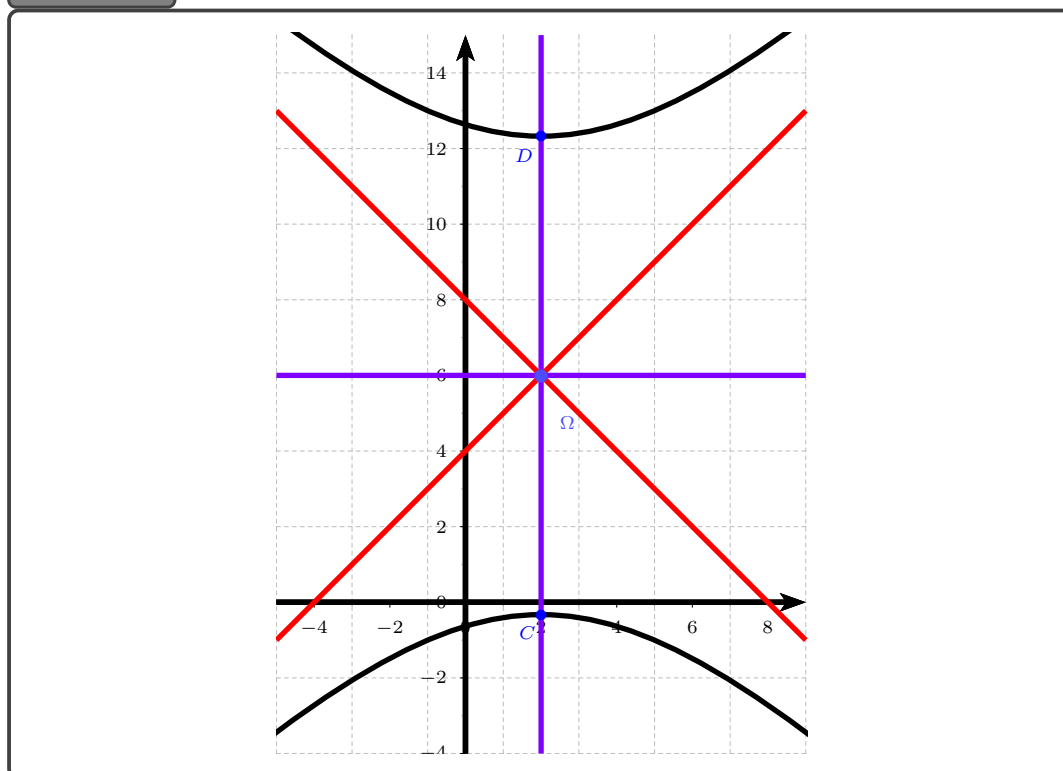
3. De même

$$M(x, y) \in (C_i) \Leftrightarrow x^2 - y^2 - 4x + 12y + 8 = 0 \Leftrightarrow -\frac{(x-2)^2}{40} + \frac{(y-6)^2}{40} = 1$$

il s'agit encore d'une hyperbole équilatère de même centre Ω , dont les droites $x = 2$ et $y = 6$ sont cette fois les axes, l'axe focal étant la droite d'équation $x = 2$.

Les sommets sont $C(2, 6 - 2\sqrt{10})$ et $D(2, 6 + 2\sqrt{10})$.

Figure .16



4. L'intersection de ces deux hyperboles sont les points d'affixe z tels que $\operatorname{Re}(Z) = \operatorname{Im}(Z) = 0$, soit $Z = 0$. Il s'agit donc des points $M(-1, -1)$ et $N(5, 13)$ d'après la question 1.

Remarque

Bien évidemment on va réfléchir un peu avant de se lancer bille en tête dans la recherche des points d'intersection des deux hyperboles précédentes. Le calcul serait très fastidieux mais surtout complètement inutile.